

Article history

Received 3 April 2019
 Revised 31 December 2019
 Accepted 3 January 2020
 Available online 23 January 2020

ABSTRACT

自由表面流れの完全な連続体力学的記述から出発して、毛細管内の液体の上昇モデルを導出します。この導出はいくつかの点で改良されています。第一に、すべり境界条件が毛細管壁に与える影響がモデルに追加されています。第二に、定常上昇高さが補正されています。第三に、界面近傍の質量を用いた正則化が提案されています。第四に、接触線近傍の速度場の影響が追加されています。最後に、解析では貯留層のない毛細管を考慮しているため、対流の寄与が生じます。モデルの検証には、参照解として機能する完全な連続体力学的モデルを解くために、任意ラグランジュ・オイラー (ALE) アプローチが使用されています。定常高さの補正は連続体力学的結果と非常によく一致し、拡張モデルは一般に古典的な記述を改善します。追加の散逸効果を増加させるために粘性項を増やすと、完全に解決された検証ケースと非常によく一致するようになります。しかし、上昇高度の振動を伴う領域では、拡張モデルによって振幅が過大評価されます。

© 2020 Published by Elsevier Ltd.

1. Introduction

自然界や技術の様々な場面において、液体が小さな空洞に侵入する現象は重要な役割を果たす。これらの応用例としては、スポンジへの液体の浸透、毛細管ポンプ、多孔質岩石からの原油抽出などが挙げられる。このような現象の典型的な問題は、毛細管内の液体の上昇である。これは次のように要約できる。密度 ρ 、動粘性 μ の液体が、半径 R の狭い円筒内を重力加速度 g で重力に逆らって上昇する。液体は、表面張力と毛細管壁の相互作用によって上昇する。表面張力は係数 σ で表され、液体と気体の界面は壁に対して角度 θ (接触角) をなしている。この設定において、円筒状の毛細管における液体の上昇高さ h_{Jur} は、次のように計算できる。

$$h_{Jur} = \frac{2\sigma \cos(\theta)}{R\rho g} \quad (1)$$

これは Jurin's height (Jurin, 1719) としても知られている。Lucas (1918) と Washburn (1921) は、慣性力、粘性力、毛細管力の 1 次元の力の釣り合いを考慮して、液体の時間経過に伴う上昇高さをモデル化した。両著者はモデルの近似解を提示し、多孔質媒体と単一の円筒状毛細管を上昇する様々な液体の実験によって検証した。

Bosanquet (1923) では、このモデルに慣性の項を追加して拡張し、時間の経過に伴う液体の上昇高さのモデルを作成した。

$$\rho \frac{dh}{dt} + \frac{8\mu h}{R^2} \dot{h} + \rho gh = \sigma \frac{2 \cos(\theta)}{R} \quad (2)$$

$$\dot{h}(t_0) = \dot{h}_0, h(t_0) = h_0 > 0$$

この非線形常微分方程式を古典モデルと呼ぶ。式 2 は円筒状毛細管内の液体の上昇を記述したもののだが、2 枚の平板の間を上昇する液体についても同様の記述を導くことができる。設定のパラメータによっては、 t が小さい場合、慣性と重力項を無視することができる。また、時間積分により円筒状毛細管内の液体の上昇に関する Lucas-Washburn 方程式 $h(t) = \sqrt{R\sigma \cos \theta t / 2\mu}$ が得られる。この近似解は有限の上昇高さ (定常値) を与えないが、初期段階の実験との比較において依然としてよく用いられる。一方、古典的モデル (式 2) は

Jurin's height と整合しており、すなわち $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = h_{Jur}$ となる。

古典モデルには、追加の物理的効果を取り入れたり、特定の実験設定に古典モデルを適応させたりすることを目的として、様々な拡張が提案されている。Szekely ら (1971) の文献では、毛細管入口の下部に無限の液体貯留層を組み込むことで古典モデルが拡張されている。これにより、 $t \rightarrow 0$ における古典モデルの特異性が解消され、初期条件として $h(0) = 0$ を形式的に使用することが可能になる。Fries および Dreyer (2009) は、Lorceau ら (2002) の文献を参照しながら、 h を減少させるために古典的モデルの 2 次項を無視する必要があると述べている。リザーバーと毛細管の直径の変化によって引き起こされる毛細管の入口での圧力損失が特異であるため、この適応が必要であると主張している。Joos ら (1990) は、毛細管数 $Ca = \mu \dot{h} / \sigma$ の経験的接触角モデル $\theta(Ca)$ を組み込むことで、接触角 θ が上昇速度に依存すると仮定している。界面活性剤が液体の上昇高さに及ぼす影響を時間経過とともに考慮するため、Zhud ら (2000) は表面張力係数を変化させることでモデルが拡張されています。このモデルは、ラングミュア等温線を用いた単純な吸着機構を含んでいる。Stange ら (2003) は、Szekely ら (1971) のアプローチを用いてリザーバーを組み込むことで、古典的モデルを拡張している。さらに、接触角は Hoffman モデル (Jiang ら (1979) の関係と Hoffman (1975) の実験データに基づく $\theta(Ca)$ の経験的關係) に従うと仮定している。貯留層の自由表面の影響と表面自体の減衰振動も考慮される。

古典的モデルの次元解析は文献 Fries and Dreyer (2009) に示されている。様々なスケールが解析され、古典的モデルの既知の解析解が適用可能な限界領域と関連付けられている。この比較には、文献 Lucas (1918)、Washburn (1921)、Bosanquet (1923)、Quére (1997)、および Fries and Dreyer (2008) による近似解析解が含まれている。毛細管内の液体は毛細管壁を濡らすため、接触線の挙動をどのようにモデル化すべきかという問題が生じる。単相流における固体表面の標準的な境界条件は、滑りなし境界条件である。移動接触線の場合、このモデルは移動接触線パラドックスにつながる (Huh and Scriven, 1971)。この問題は、毛細管上昇の文脈において様々な著者によって取り上げられている。文献 Huh and Mason (1977)

は、準定常上昇における接触線近傍の速度場の近似値を導出しており、接触線近傍の毛細管壁にはナビエ滑り境界条件が用いられている。文献 Lowndes, (1980) では、軸対称有限要素法 (FEM) を用いて、様々な準定常上昇速度に対する様々な界面形状が計算されている。準静的界面と共動する参照フレーム内での同様の設定は、文献 Sprittles and Shikhmurzaev (2012) の FEM 実装によって提供されている。局所速度場に加えて、時間経過に伴う上昇高度が考慮され、古典的モデルと比較されている。Levine ら (1980) は、2枚の平行板間および円筒管内の液体の上昇モデルを導出している。このモデルでは、メニスカスの形状は固定され、加速度は準定常であり、非線形項は無視できると仮定している。2つの領域が考慮される。1つは毛細管壁の主要部分であり、no-slip 境界条件が適用される。もう1つは接触線近傍を含む領域であり、ナビエ滑り境界条件が適用される。2つの領域は漸近マッチングを用いて結合される。

毛細管内の液体の上昇は、連続体力学的自由表面問題の数値解を求めるための参考事例としても興味深い。幾何学的な設定は比較的単純で、2枚のプレート間の液体の上昇に関する2次元問題にまで簡略化できる。さらに、流入部と界面から離れると、標準的なポアズイユ流れのプロファイルが期待できる。接触線付近で積分可能な圧力場と散逸場を得るには、no-slip / no penetration (貫通無し) 境界条件を、例えばナビエ滑り境界条件に置き換える必要がある (Huh and Mason, 1977)。このようなアプローチは、前述の移動接触線パラドックスとそれに伴う特異点を少なくとも部分的に回避するために必要である。しかし、これにより解決すべき新たなスケールが生じる。分子動力学に基づく計算では、滑り長はナノメートル領域、あるいはそれ以下になることもある (Qian et al., 2003)。毛細管内を上昇する液体の実験は、通常、Jurin's height (数 cm) のスケールで行われる。実験セットアップを計算するには、両方の長さスケールを解像する必要があり、接触線近傍では精密なメッシュ解像度が必要となる。古典的モデルの拡張は通常、より多くの物理的効果を取り入れるため、または与えられた実験セットアップに適応するためだが、以下の導出では、毛細管上昇問題に対する常微分方程式モデルの連続体力学的記述間の互換性に焦点を当てている。これにより、滑りの影響を考慮した参照解が得られ、毛細管半径のスケールで滑り長を選択できるようになる。

Joos et al. (1990); Heshmati and Piri (2014); Wu et al. (2017) では、円筒形毛細管内の液体の漸近上昇に関する実験的研究が行われている。これらの結果は、古典的モデルが実験観測よりも速く定常高さまで上昇することを示しており、Sprittles and Shikhmurzaev (2013) では、実験結果と古典的上昇モデルの比較と、Shikhmurzaev (1993) で導入された界面形成モデルの数値解が示されている。ここでも、古典的モデルにおいて、定常高さに到達するのに必要な上昇時間は実験値よりも速い。

本研究では、拡張された毛細管上昇モデルを提示し、滑りを考慮した連続体力学モデルと比較して古典的モデルを改良する。この種の境界条件と接触角モデルの組み合わせは、濡れ問題において最も頻繁に用いられるモデルの一つであるにもかかわらず、これまでこのような比較は行われていない。拡張モデルの詳細な導出は、濡れ問題の連続体力学記述から始まり、定常上昇高さ、初期高さの消失に対する正則化に関する様々な改良をもたらし、接触線近傍のくさび領域だけでなく壁面における滑り境界条件の影響も組み込んでいる。簡略化のため、毛細管における液体上昇の2次元変形を以下に示す。次の節では、キャピラリー内の全液体領域における積分質量・運動量バランスを用いた拡張モデルを導出する。こ

れには、キャピラリー一壁におけるナビエ滑り境界条件の使用が含まれる。導出の一部は、Dreyer et al. (1994) のアプローチに従う。

2. 滑りを考慮した毛細管上昇モデルの導出

2枚のプレート間の液体の上昇の一般的な仕組みを図1に示す。液体領域 $\Omega(t) = \mathbb{R}^3$ は時間とともに変化する。気液界面 $\Sigma(t)$ はy方向に上昇し、液体は $\partial\Omega_{in}$ を通って毛細管に流入する。流入により、濡れ面積 $\partial\Omega_{wall}(t)$ は時間とともに増加する。このケースは2次元で扱うことも可能であるが、以下の導出では積分深度Dの3次元チャンネルを仮定する。

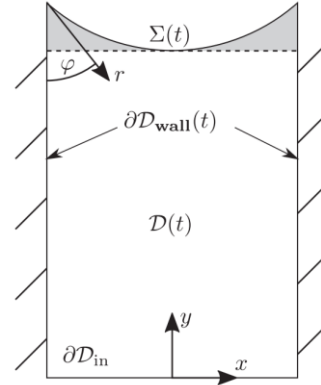


Fig. 1 Domain and boundary names for liquid rising in a capillary.

以下では、分子レベルで混和しない2つの非圧縮性流体の自由表面流について考察する。さらに、相変化およびマランゴニ効果は無視する。ここで考察する液体-空気系では、より軽く粘性の低い相 (この場合は空気) の影響は、より密度が高く粘性の高い液体相には通常無視できるほど小さい。したがって、 $\rho_g/\rho_l \ll 1$ および $\mu_g/\mu_l \ll 1$ である。これに対して自由表面流れを仮定することが可能であり、ここでもこの仮定を採用する (添え字 l および g はそれぞれ液体相と気体相を表す)。ここからは、液体に関する量のみを考察する。気体中の基準圧力は一定であり、ゼロに設定される。ここで説明した設定において、任意に移動する制御体積 $\Omega(t)$ に対する積分形式の質量保存式および運動量保存式は、以下の通りである。

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho dV = \int_{\partial\Omega(t)} \rho(\mathbf{v}_b - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} d\sigma \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho \mathbf{v} dV = & \int_{\partial\Omega(t)} \rho \mathbf{v} d\sigma + \int_{\partial\Omega(t)} \rho \mathbf{v} \otimes (\mathbf{v}_b - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} d\sigma \\ & + \int_{\Omega(t)} \rho \mathbf{g} dV \end{aligned} \quad (4)$$

ここで、 ρ は液体の密度である。気液界面 $\Sigma(t)$ の表面張力係数は σ で表される。重力は、重力加速度 \mathbf{g} を伴う体積力として考えられる。制御体積 $\Omega(t)$ は時間とともに変化するため、その境界も速度 \mathbf{v}_b で変化する。移動する制御体積の法線は \mathbf{n} で表され、 $\Sigma(t)$ の界面法線 \mathbf{n}_Σ と一致する。界面の向きは、 $x = 0$ において $\mathbf{n}_\Sigma = \mathbf{e}_2$ となる。ここで扱うニュートン流体の場合、コーシーテンソル \mathbf{S} は次のようにモデル化される。

$$\begin{aligned} \mathbf{S} = & -p\mathbf{I} + \mathbf{S}^{\text{visc}} \\ \mathbf{S}^{\text{visc}} = & \mu(\nabla\mathbf{v} + \nabla\mathbf{v}^T) \end{aligned} \quad (5)$$

ここで、 \mathbf{S}^{visc} は粘性応力テンソル、 p は圧力、 μ は液体の動粘性である。流入境界面には、速度に関する一様ノイマン境界条件が適用される。毛細管壁面には、滑り長さ L を伴うナビエ滑り境界条件と、浸透なし境界条件の組み合わせが適用され

る。(※注意： $L = 0$ の場合、ナビエ滑りは滑りなし境界条件に戻る)

界面では、標準的な自由表面境界条件が適用される。接触角については、一定の接触角が使用される。このようなモデルは、毛細管上昇の古典的モデルの導出に必要な仮定の1つであり、これにより、以下の条件が得られる。

$$\partial_n \mathbf{v} = 0 \quad \text{on } \partial \Omega_{in} \quad (6)$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{on } \partial \Omega_{wall}(t) \quad (7)$$

$$L \partial_n P_{\partial \Omega} \mathbf{v} = P_{\partial \Omega} \mathbf{v} \quad \text{on } \partial \Omega_{wall}(t) \quad (8)$$

$$p \mathbf{n}_\Sigma - \mathbf{S}^{visc} \mathbf{n}_\Sigma = \sigma \kappa \mathbf{n}_\Sigma \quad \text{on } \Sigma(t) \quad (9)$$

$$\mathbf{v}_\Sigma \cdot \mathbf{n}_\Sigma = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_\Sigma \quad \text{on } \Sigma(t) \quad (10)$$

$$\theta = \text{const} \quad \text{at } \partial \Sigma(t) \quad (11)$$

ここで、 $P_{\partial \Omega} := \mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$ は領域境界の局所接空間への射影子であり、 \mathbf{I} は単位テンソルである。体積速度 \mathbf{v} と表面速度 \mathbf{v}_Σ の両立性は文献10によって保証されている。

制御体積境界の速度 \mathbf{v}_b は、毛細管内の流体を追跡するように選択される。これは、制御体積境界が界面、毛細管壁、および流入境界で構成されることを意味する。さらに、流入境界は流体とともに移動せず、毛細管の流入部に留まる。これらの仮定は、制御体積の動きと流体速度を次のように結びつける。

$$\mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \quad \text{on } \Sigma(t) \cup \partial \Omega_{wall}(t) \quad (12)$$

$$\mathbf{v}_b = 0 \quad \text{on } \partial \Omega_{in} \quad (13)$$

界面の形状は変形しない球面であると仮定する。その結果、接触角は毛細管上昇速度に依存しない。これは、例えば経験的接触角モデルの適用とは対照的である。(Bush, 2010, p.27)では、 $R \ll l_c$ が与えられた場合、メニスカスは半径 $R = R / \cos \theta$ の球面形状をとることが分かっている。ここで、 $l_c := \sqrt{\sigma / \rho g}$ は毛細管長である。

2.1. 毛細管の体積

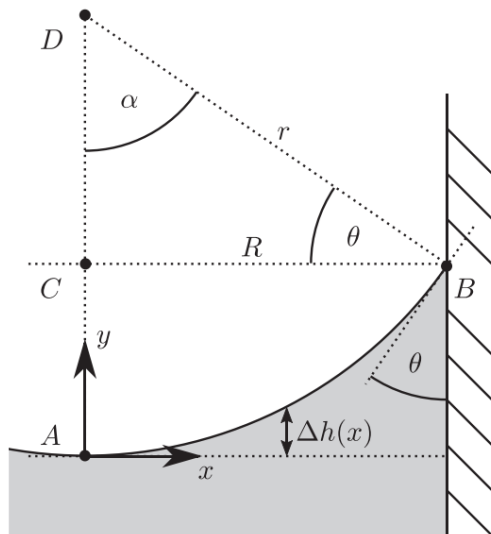


Fig. 2 Contact line vicinity

図2は接触線近傍の界面の図解である。距離 CB は毛細管の直径(半径)の半分であり、 R で表される。毛細管の全直径は

H で表され、 $2R = H$ となる。

図2を考慮すると、 $r = R / \cos \theta$ となる。メニスカス状の界面を仮定して毛細管の全質量を計算するために、流入部から界面までの距離は次のように表される。

$$\tilde{h}(t, x) = h_{apex}(t) + \Delta h(x) \quad (14)$$

ここで $h_{apex}(t)$ は流入境界から界面の最下部($x = 0$)までの距離である。メニスカスの底面(高さ $y = 0$ の点線)から界面までの距離は対称面(軸)からの距離に依存し、 $\Delta h(x)$ で表される。

$\Delta h(x) = r - \sqrt{r^2 - x^2}$ のとき、毛細管内の液体の体積は、次のように与えられる。

$$|\Omega(t)| = 2D \int_0^R h_{apex}(t) + r \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2} \right) dx \quad (15)$$

この積分は解析的に解くことができ、結果は次のようになる。

$$|\Omega(t)| = 2DR(h_{apex}(t) + \hat{h}) \quad (16)$$

$$\hat{h} := \frac{R}{2 \cos \theta} \left(2 - \sin \theta - \frac{\arcsin \cos \theta}{\cos \theta} \right) \quad (17)$$

どちらの式に於いても、体積 $|\Omega(t)|$ は、 h_{apex} から流入部までの体積、 h_{apex} から界面までの体積の2つの体積から構成されている。

定常状態で作用する力は、重力と表面張力の y 方向成分であり、力の釣り合いは次式となる。

$$gm_\infty = \rho g |\Omega_\infty| = 2D\sigma \cos \theta \quad (18)$$

この力の釣り合いでは、質量 $m_\infty = \rho |\Omega_\infty|$ であり、したがって体積は毛細管に浸透する。全体積を使用する場合、式(18)を整理すると、補正された定常上昇高さが得られる。

$$h_{apex \infty} = \frac{\sigma \cos \theta}{R \rho g} - \hat{h} \quad (19)$$

式(19)の最初の項は、2枚の平板間の液体の高さである、Jurin's height $h_{Jur, 2D}$ である。2つ目の項は、 h_{apex} における水平断面と界面の間に液体が取り込まれることによる補正である。したがって、Jurin's heightは、流入量 $\partial \Omega_{in}$ と h_{apex} における流路断面との間の体積のみを考慮した定常上昇高さの近似解である。円筒形毛細管における定常上昇高さのこのような補正の導出は、例えば、文献 Levine et al. (1980)に記載されている。

古典モデル(式2)は、Jurin's height(式1)と整合している。すなわち、 $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = h_{Jur}$ である。以下に示すように、追加の液体体積は実際に上昇高さに影響を与える可能性がある。補正の影響は、4.1節で、完全自由表面問題の解と古典的モデルとの比較によって分析される。メニスカスの仮定は、毛細管上昇モデルの初期高さに幾何学的条件を与えることに注意されたい。

$$h_{apex}(t_0) =: h_{cl}(t_0) - \Delta h(R) \geq 0 \quad (20)$$

2.2. 質量保存則と運動量保存則

以下では、平均流速は鉛直座標のどこでも同じで、 yz 平面を軸に面対称であると仮定する。すなわち、

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ v(t, x) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{with } v(t, -x) = v(t, x) \quad (21)$$

この仮定は界面近傍にも接触線近傍にも適用されないことは明らかである。したがって、メニスカス領域における速度場の水平成分によって引き起こされる粘性散逸は、式 21 に基づくモデルには含まれないと予想される。Huh and Mason (1977) は、界面の影響は界面から管径 1 つ分まで及ぶと報告している。この推定は Lowndes (1980) によって確認されており、円筒状毛細管内で液体が上昇する場合、ポワズイユ流れの分布が界面からおよそ 1 つの毛細管直径分離れた位置まで確立することが示されている

2.3. 質量保存則

液相における密度が一定であると仮定すると、質量保存則 (式 3) を毛細管内の液体体積変化の条件に還元できる。

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} 1 dV = \int_{\partial\Omega(t)} \rho(\mathbf{v}_b - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} do \quad (22)$$

液体の制御体積の境界における積分は、 $\partial\Omega(t) = \partial\Omega_{\text{wall}}(t) \cup \Sigma(t) \cup \partial\Omega_{\text{in}}$ に分割される。制御体積速度の境界条件である 式 12 および 式 13 と組み合わせると、式 22 の右辺にある流束積分は次のように簡略化される。

$$\int_{\partial\Omega(t)} \rho(\mathbf{v}_b - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} do = - \int_{\partial\Omega_{\text{in}}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} do \quad (23)$$

ここで、 $\partial\Omega_{\text{in}}$ の法線は $\Omega(t)$ の外側を指す。すなわち $\mathbf{n} = (0, -1, 0)^T = -\mathbf{e}_y$ である。速度場に関する仮定 (式 21)、液体体積 (式 16)、および体積保存則 (式 22) を組み合わせると、次の式が得られる。

$$\frac{d}{dt} |\Omega(t)| = \frac{d}{dt} HD(h_{\text{apex}}(t) + \hat{h}) = HD\dot{h}_{\text{apex}}(t) \quad (24)$$

式 24、式 21、式 23 を 式 22 と組み合わせると、次の式が得られる。

$$HD\dot{h}_{\text{apex}}(t) = \int_{\partial\Omega_{\text{in}}} v(t, x) do \quad (25)$$

y 方向の速度の x 平均を定義する。

$$\bar{v}_y(t) := \frac{1}{H} \int_{-H/2}^{H/2} v(t, x) dx \quad (26)$$

さらに h_{apex} の速度を次のように記述する。

$$\dot{h}_{\text{apex}}(t) = \bar{v}_y(t) \quad (27)$$

以降は、 h_{apex} を表す関数を h で表す。

2.4. 運動量保存則

この節では、運動量保存則の各項を個別に考察する。座標系が必要な場合、原点は流入点に置き、向きは図 1 と同様とする。

2.4.1. 慣性項

式 21 の仮定を用いることで、y 方向の積分から速度を抜き出すことができ、その結果として

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho \mathbf{v} dV = \rho D \frac{d}{dt} \int_{-H/2}^{H/2} \tilde{h}(t, x) v(t, x) \mathbf{e}_y dx \quad (28)$$

流入と界面間の距離 (式 14) の定義により、慣性項を二つの寄与に分解できる

$$\rho D \frac{d}{dt} \int_{-H/2}^{H/2} \tilde{h}(t, x) v(t, x) \mathbf{e}_y dx = \quad (29)$$

$$\rho D \frac{d}{dt} \left(\int_{-H/2}^{H/2} h v(t, x) \mathbf{e}_y dx + \int_{-H/2}^{H/2} \Delta \tilde{h}(x) v(t, x) \mathbf{e}_y dx \right) \quad (30)$$

h は時間のみに依存するため、式 30 の右辺にある最初の積分から取り出せる。その後 式 26 と 式 27 を適用すると

$$\rho D \frac{d}{dt} \int_{-H/2}^{H/2} h v(t, x) \mathbf{e}_y dx = \rho D H \frac{d}{dt} (h \dot{h}) \mathbf{e}_y \quad (31)$$

Neglecting

$$\frac{1}{H} \int_{-H/2}^{H/2} \tilde{h}(x) v(t, x) \mathbf{e}_y dx \quad (32)$$

式 27 により、慣性項に対して以下の近似式が得られる：

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho \mathbf{v} dV \approx \rho D H \frac{dh \dot{h}}{dt} \mathbf{e}_y \quad (33)$$

この近似は、 t の増加と、 $\tilde{h}(x) \ll h(t)$ に対して妥当であり、2 次元の古典的毛管上昇方程式の左辺に慣性項をもたらすが、それに関わらず 式 30 の括弧内の第二項の近似は可能である。界面は速度 $\dot{h}_{\text{apex}}(t)$ で上昇する。したがって、界面近傍における速度 $v(t, x)$ は \dot{h} とほぼ同値となる。よって、 $v(t, x) \approx \dot{h}(t)$ であるべきである。これにより、毛管体積を次式を通じて含めることが可能となる：

$$\frac{1}{H} \int_{-H/2}^{H/2} \tilde{h}(x) v(t, x) \mathbf{e}_y dx \approx \dot{h} \frac{1}{H} \int_{-H/2}^{H/2} \tilde{h}(x) \mathbf{e}_y dx = \dot{h} \hat{\mathbf{e}}_y \quad (34)$$

したがって、 h_{apex} を超える液体体積の寄与を含む慣性項の近似式は次のように表される。

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho dV \approx \rho D H \frac{d}{dt} (\dot{h}(h + \hat{h})) \mathbf{e}_y \quad (35)$$

このように、メニスカス体積を含めると、初期条件 $h(t_0) = 0$ の場合のモデルの挙動に大きな影響があることに注意。前述のように、初期高さゼロは古典モデルにおいて特異になる。この問題は Szekely ら (1971) で取り上げられており、同類項は加速が必要な貯留層内 (毛細管下の貯水層) の液体体積を組み込むことによる。Szekely ら (1971) の改良により、 $7/6R$ (毛細管が円筒形の場合) が 式 35 の \hat{h} とまったく同じ位置に置かれる。Maggi および Alonso-Marroquin (2012) でも同じ議論が展開されている。Levine ら (1976) では追加の項は $37/36R$ であるが、Stange ら (2003) では $73/60R$ である。 $0.916r_e$ という項は、2 枚の平行な平板間の上昇をモデル化した文献 Dreyer et al. (1994) における正規化に用いられている。有効半径 r_e は、ギャップ幅 $2c$ 、ギャップ長 $2d$ として、 $r_e = 2\sqrt{cd/\pi}$ で定義される。著者らは皆、追加項については、毛細管下の貯水層からの液体を加速する必要があると主張している。ここでの 式 35 に至るまでの議論は、古典的モデルの

特異性がそもそもなぜ生じるのかを示している。図 1 に示す状況を考えてみる。古典的モデルでは、流入境界と h_{apex} の間の体積、すなわち灰色領域の体積を除いた $\Omega(t)$ の体積のみが考慮されている。初期高さを 0 とすると、これは毛細管の質量が 0、すなわち粘性力と毛細管力が作用する質量が 0 であることに対応し、したがって特異問題が生じる。初期高さがゼロの場合は、 h_{apex} が流入境界に接触している状態である。メニスカス状の界面を想定すると、毛細管にいくらかの質量が残り、この質量が図 1 の灰色の領域に相当する。ただし、この初期条件は毛細管と液体の接触をモデル化することを目的としていないことに注意。これは、毛細管のみを考慮する場合に、意味のある物理的解釈も可能な正則化ができることを示している。これは、上記の導出で h が流入境界から h_{apex} までの距離を表すことが明確に示されているため可能である。したがって、例えば Sprittles および Shikhmurzaev (2013) のように接触線高さと頂点を平均化するよりも正確な比較が可能です。式 35 で示した正則化は、貯留層内の液体の加速を考慮した議論と互換性があることに注意。

2.4.2. 対流項

対流項は、壁面 $\partial\Omega_{wall}$ 、流入境界 $\partial\Omega_{in}$ 、そして界面 Σ からの寄与に分割される。界面 $\Sigma(t)$ と壁面 $\partial\Omega_{wall}(t)$ では、制御体積は液体の法線速度で移動するため、相殺される。流入境界 $\partial\Omega_{in}$ では、制御体積は移動しない。 ($v_b = 0$) これは、速度に関する仮定 (式 21) と組み合わせると、次式となる。

$$\int_{\partial\Omega_{in}} \rho \mathbf{v} \otimes (\mathbf{v}_b - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} d\mathbf{o} = \rho D \int_{-R}^R v_y^2(t, x) \mathbf{e}_y dx \quad (36)$$

$$\mathbf{n} = -\mathbf{e}_y \quad \text{on } \partial\Omega_{in}$$

コーシー・シュワルツの不等式を有界領域上の積分に適用すると、

$$\int_{-R}^R v_y^2(t, x) dx \geq H \left(\frac{1}{H} \int_{-R}^R v_y(t, x) dx \right)^2 = H \bar{h}^2 \quad (37)$$

等式とするためには、速度場は x 方向で一定、すなわち $v_y(t, x) = \alpha(t)$, $\alpha \in L_2$ でなければならない。 (L : 滑り長さ) しかし、これには少なくとも毛細管壁に自由滑り境界条件が必要となる。流入部から界面までの距離が長くなるにつれて、流入速度分布はポアズイユ流れ分布に近づく。文献 Huh and Mason (1977); Lowndes (1980) では、毛細管半径の約 2 倍でポアズイユ流れ分布が得られる。このような速度分布を用いて、対流項の積分を明示的に評価することができる。ここでは、毛細管壁にナビエ滑り境界条件を課したポアズイユ流れを用いる。定常ポアズイユ流れ場は次式で与えられる。

3. 改良モデル

式 35、式 39、式 40、式 49 は運動量保存式 (式 4) と組み合わせられて、